

تعريف 6.

لتكن \sim علاقة في المجموعة E لتعرف العلاقة R في E بالآتي

$$\forall x, y \in E \quad x R y \Leftrightarrow \exists a \in I \quad x \vee a = y \vee a$$

(أ) يرمز a R علاقة تكون في E ولنرمز E/I لمجموعة الرتبة
 (ب) يرمز a R العلاقة R متوافقة مع العملية \vee أي أنه إذا $a \sim b$:

$$x R x', y R y' \Rightarrow (x \vee a) R (x' \vee a)$$

(ج) استيع أن E يمكن بناء رتبة على E/I
 (د) إذا كانت E تفرعية يرمز $a R$ $a R$ أيًا متوافقة مع \wedge ومنه استيع بناء رتبة
 الرتبة E/I

الحل:

(أ) انظر إلى $x R x$ $\forall x \in E \quad \forall a \in I \quad x \vee a = x \vee a \Rightarrow x R x$
 $\forall x, y \in E \quad x R y \Rightarrow \exists a \in I \quad x \vee a = y \vee a \Rightarrow \exists a \in I$
 $\Rightarrow y \vee a = x \vee a \Rightarrow y R x$ R متعكسة

$\forall x, y, z \in E \quad x R y \wedge y R z \Rightarrow \exists a, b \in I \quad a \vee x = a \vee y \wedge b \vee y = b \vee z$

$$x \vee (a \vee b) = (x \vee a) \vee b = (y \vee a) \vee b = (y \vee b) \vee a = (b \vee z) \vee a = z \vee (a \vee b)$$

مما يثبت $a \vee b \in I$ فيكون $x R z$ وبالتالي فإن R متوافقة مع \vee استيع أن R علاقة
 تكون في E

(ب) يرمز a R $x R x'$ $\nexists y R y$ $\nexists a, b \in I$ $a \vee b = y \vee b$ $\nexists x \vee a = x' \vee a$
 $y \vee b = y' \vee b$ $\nexists x \vee a = x' \vee a$

$$(x \vee y) \vee (a \vee b) = (x \vee a) \vee (y \vee b) = (x' \vee a) \vee (y' \vee b) = (x' \vee y') \vee (a \vee b)$$

بما أن $a \vee b \in I$ نستطيع تعريف علاقة الكسوف

$$(x \vee y) R (x' \vee y')$$

ع) اذا عرفنا \sim العملية \sim بالادلة التالي

$$\tilde{x} \vee \tilde{y} = \widetilde{x \vee y}$$

الخاصية $\tilde{x} \vee \tilde{x} = \widetilde{x \vee x} = \tilde{x}$

الخاصية $\forall \tilde{x}, \tilde{y} \in E/I ; \tilde{x} \vee \tilde{y} = \widetilde{x \vee y} = \tilde{y} \vee \tilde{x} = \widetilde{y \vee x}$

$$\begin{aligned} \forall \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z} \in E/I ; \tilde{x} \vee (\tilde{y} \vee \tilde{z}) &= \widetilde{x \vee (y \vee z)} = \widetilde{x \vee (z \vee y)} \\ &= \widetilde{(x \vee z) \vee y} = (\widetilde{x \vee z}) \vee \tilde{y} \\ &= (\tilde{x} \vee \tilde{z}) \vee \tilde{y} \end{aligned}$$

وبالتالي $\tilde{x} \vee \tilde{y} = \tilde{y} \Leftrightarrow \tilde{x} \leq \tilde{y}$ في E/I حيث \leq علاقة ترتيب

بفرض $a, b \in E$ تعرّف $a \leq b$ إذا $a \in R_b$ حيث $R_b = \{x \in E \mid x \vee b = b\}$ حيث يكون $y \vee b = y' \vee b$ $\Leftrightarrow x \vee a = x' \vee a$

ع.

$$\begin{aligned} (x \wedge y) \vee (a \vee b) &= (x \vee a \vee b) \wedge (y \vee a \vee b) = ((x \vee a) \vee b) \wedge ((y \vee b) \vee a) \\ &\text{لأنه ينجز شوازل} \\ &= ((x' \vee a) \vee b) \wedge ((y' \vee b) \vee a) = (x' \vee (a \vee b)) \wedge (y' \vee (a \vee b)) \\ &= (x' \wedge y') \vee (a \vee b) \end{aligned}$$

وبما $a \vee b \in \bar{a} \vee \bar{b}$ نتج $a \vee b \in \bar{a} \vee \bar{b}$ أي $(x \wedge y) \in R_{a \vee b}$ متوافقة مع \wedge في حالة E توزيعية

أخرى E/I متوافقة مع \wedge في E/I حيث $\tilde{x} \wedge \tilde{y} = \widetilde{x \wedge y}$ $\forall \tilde{x}, \tilde{y} \in E/I$ بنفس الطريقة بفرض $a \vee b$ الشوازل في E هي $a \vee b$ التالية:

الخاصية - التبادلية - الجمعية - المماسية - بالاضافة الى ذلك

$$\forall \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z} \in E/I \quad \tilde{x} \wedge (\tilde{x} \vee \tilde{y}) = \tilde{x} \wedge \widetilde{x \vee y} = \widetilde{x \wedge (x \vee y)}$$

أي ان الخاصية المماسية محقة وبالتالي E/I تكون شبكة

المقالات البولندية.

نتيجة المبرهنات السابقة، نذكر أن العلاقة التوزيعية والمقابلة أمر متبادل، ونحن نرى أن
بناءً على بول، يمكننا بناء ما هو العلاقة، وهي علاقة بول (علاقة واحدة تحقق $x = x'$
 $x \vee x' = 1$ أي x و x' متضادين) ولقد ذكرنا أن هذه العلاقة كانت موجودة في هذا الشكل
في بعض الحالات، ونلاحظ أن المقامير الواردة في الشكل السابق يمكن تلخيصها في البولندية
في المبرهنات المقابلة، البرمجة، البرمجة، المقابلة.

علاقة بول:

نسب العلاقة التي تكونت بآلة واحدة توزيعية ومقابلة هي علاقة بول.

ملاحظة:

في حالة أن x هي علاقة بول، فإننا نلاحظ أن المقامير الواردة في الشكل السابق هي علاقة بول
في تلك الحالة واحدة x يجب أن تكون $x \vee x' = 1$ و $x \wedge x' = 0$.

وإذا كانت x هي علاقة بول، فإننا نلاحظ أن المقامير الواردة في الشكل السابق هي علاقة بول
في $[a, b]$ ويكون $[a, b] = (a \vee x') \wedge b$.

ملاحظة:

كل علاقة $(C, P(C))$ تكون علاقة بول (لا علاقة واحدة، وتوزيعية، ومقابلة، ولكن غير متماثل).

نلاحظ أن المقامير السابقة هي علاقة بول:

بأن $x \vee x' = 1$ (مقابلة).

و $x \wedge x' = 0$.

من أجل أي $x \in E$ فإن $x' = (x')'$ (ملاحظة: $x' = (x')'$ هي علاقة بول).
من أجل أي $x, y \in E$ فإن $(x \vee y)' = x' \wedge y'$ و $(x \wedge y)' = x' \vee y'$
وحيث أن المقامير السابقة هي علاقة بول، فإن المقامير السابقة هي علاقة بول.

$$(x \wedge y) \wedge (x' \vee y') = (x \wedge y \wedge x') \vee (x \wedge y \wedge y') = (0 \wedge y) \vee (x \wedge 0) \\ = 0 \vee 0 = 0$$

$$(x \wedge y) \vee (x' \vee y') = (x \vee x' \vee y') \wedge (y \vee x' \vee y') = (1 \vee y') \wedge (1 \vee x') = 1 \wedge 1 = 1$$

نبي ان كل عبارة منطقية لاخر

$$x \vee y = (x' \wedge y')' = (x' \wedge y')' \Rightarrow (x \vee y)' = [(x' \wedge y')]' = x' \wedge y'$$

$$(x \vee y)' = x' \wedge y'$$

الجمع:

لنكون في شبكة جدول عملية جديدة من الجمع بالادنى

$$x + y = (x \wedge y') \vee (x' \wedge y) \quad (1)$$

مكون:

في الشبكة (C, E, P) عملية الجمع من الجمع عن الزيادة المتأخرية.

$$x \Delta y = (x \wedge C y) \vee (C x \wedge y)$$

عينة كتابة (1) بالادنى

$$\begin{aligned} x + y &= [(x \wedge y') \vee x'] \wedge [(x \wedge y') \vee y] \\ &= (x \wedge x') \wedge (y' \vee x') \wedge (x \vee y) \wedge (y' \vee y) \\ &= 1 \wedge (y' \vee x') \wedge (x \vee y) \wedge 1 \\ &= (x \vee y) \wedge (y' \vee x') \end{aligned}$$

$$x + y = (x \vee y) \wedge (x' \vee y')$$

من (1) عينة ان يكتب:

$$(x + y)' = (x' \vee y) \wedge (x \vee y')$$

من (2) عينة ان يكتب:

$$(x + y)' = (x \wedge y) \vee (x' \wedge y')$$

1. عملية الجمع تحت العناوين التالية:

(a) تبديلية

(b) تقيد او انكار جديدي

$$x + 0 = (x \wedge 1) \vee (x' \wedge 0) = x \vee 0 = x$$

(c) x عنصر محايد

$$x + x = (x \wedge x') \vee (x' \wedge x) = 0 \vee 0 = 0$$